Exercice 1 :

1) ■ f est définie sur $D_f = \mathbb{R}^2$

■ Continuité sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

- Les fonctions $(x,y) \longmapsto (1+x^2+y^2)^2 - 1$ et $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ sont polynômiales donc elles sont continues (même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
- De plus $x^2+y^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

■ Continuité en $(0,0)$:

* $f(0,0) = 2$
* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x^2+y^2)^2-1}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2+x^2+y^2$$

$$= 2$$

$$= f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f est continue en $(0,0)$

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$

2) ■ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2+x^2-2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x = \boxed{0}$$

■ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{2+y^2-2}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} y^2 = \boxed{0}$$

3) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = \frac{(1+x^2+y^2)^2-1}{x^2+y^2} = 2+x^2+y^2$$

■ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

4). $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ 2x & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ 2y & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

■ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

■ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2y = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$

Conclusion : f est de classe C^1 en $(0,0)$

5) (P) : $z = f(0,0) + f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0)$

$$= 2 + 0x + 0y$$

$$= 2$$

Concl. : (P) est le plan d'équation $z = 2$ (il est horizontal)

6) ■ Position :

Il faut étudier le signe de la quantité $f(x,y) - 2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)-2=\begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\\ 2+x^2+y^2-2 & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x,y)-2 = x^2+y^2 \geq 0$

Conclusion : (S) est située au dessus de (P) sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} f(0,0)=2 \\ f(x,y)\geq 2 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

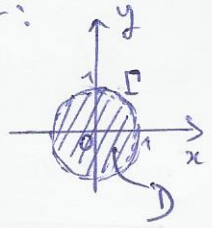
$\Rightarrow$ f admet un minimum absolu en $(0,0)$, de valeur $f(0,0)=2$

7] $\Gamma : f(x,y)=3$

$f(x,y)=3 \iff 2+x^2+y^2=3$
$\iff x^2+y^2=1$

Donc la courbe Γ de niveau 3 est le cercle d'équation $x^2+y^2=1$ (de centre $(0,0)$ et de rayon 1).

8] le volume de Ω est :



$$V_\Omega = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_D (2+x^2+y^2)\,dxdy$$

Passons aux coordonnées polaires :
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$$

Sur D : $\begin{cases}\theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ r \text{ varie de } 0 \text{ à } 1\end{cases}$

$$V_\Omega = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (2+r^2)\,r\,dr\right)d\theta$$

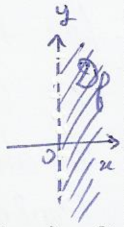
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 (2r+r^3)\,dr$$

$$V_\Omega = [\theta]_0^{2\pi} \times \left[r^2+\frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \times \frac{5}{4} = \boxed{\frac{5\pi}{2}} \text{ u.v.}$$

Exercice 2 :

1) $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$



---

2) f est de classe C^∞ sur D_f et $\forall (x,y)\in D_f$

- $f'_x(x,y) = y\ln x + xy\times\frac{1}{x} = y(1+\ln x)$
- $f'_y(x,y) = 2y + x\ln x$
- $f''_{xx}(x,y) = \frac{y}{x}$
- $f''_{yy}(x,y) = 2$
- $f''_{xy}(x,y) = 1+\ln x = f''_{yx}(x,y)$

---

3) Sur D_f $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases} y(1+\ln x)=0 \\ 2y+x\ln x=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \text{ ou } 1+\ln x=0 \\ 2y+x\ln x=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases} y=0 \\ x\ln x=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}\ln x=-1 \to x=e^{-1} \\ 2y-e^{-1}=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=1 \\ y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases} x=e^{-1} \\ y=\frac{e^{-1}}{2}\end{cases}$

Donc f admet deux points critiques sur son domaine : Ce sont les points $A(1,0)$ et $B\left(e^{-1},\frac{e^{-1}}{2}\right)$

---

4) Testons les conditions du 2^e ordre :

$\forall (x,y)\in D_f$,

$$D(x,y) = [f''_{xy}(x,y)]^2 - [f''_{xx}(x,y)]\cdot[f''_{yy}(x,y)]$$

$$= [1+\ln x]^2 - \left[\frac{y}{x}\right]\times[2]$$

$D(x,y) = (1+\ln x)^2 - 2\frac{y}{x}$

• en $A(1,0)$:

$D(1,0) = (1+\ln 1)^2 - 2\times\frac{0}{1} = 1 > 0$

$\Rightarrow$ f admet en $A(1,0)$ un point de selle.

• en $B(e^{-1},\frac{e^{-1}}{2})$:

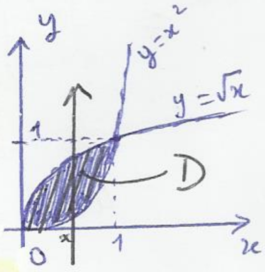
$$\begin{cases} D(e^{-1},\frac{e^{-1}}{2}) = (1+\ln e^{-1})^2 - 2\cdot\frac{e^{-1}/2}{e^{-1}} = -1<0 \\ f''_{xx}(e^{-1},\frac{e^{-1}}{2}) = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f admet en $B(e^{-1},\frac{e^{-1}}{2})$ un minimum local de valeur

$f(e^{-1},\frac{e^{-1}}{2}) = \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^{-2}}{2} = -\frac{e^{-2}}{4}$

Exercice 3 :

a) (Coupe à x constant)



$$I = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} e^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(\sqrt{x}\left[e^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\right)dx$$

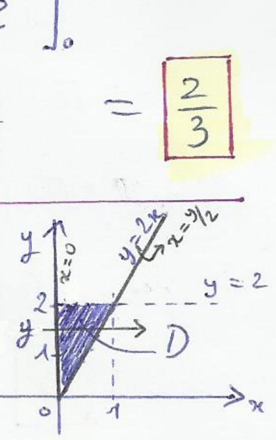
$$= \int_0^1 \sqrt{x}\left(e - e^{x^{3/2}}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(e.\sqrt{x} - \underbrace{\sqrt{x}\,e^{x^{3/2}}}_{\frac{2}{3}u'e^u}\right)dx \qquad \cdot\ (x^{3/2})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$= \left[\frac{2}{3}e.x\sqrt{x} - \frac{2}{3}e^{x^{3/2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}e - \frac{2}{3}e + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

b) (Coupe à y constant)



$$J = \int_0^2\left(\int_0^{y/2}\cos y^2\,dx\right)dy$$

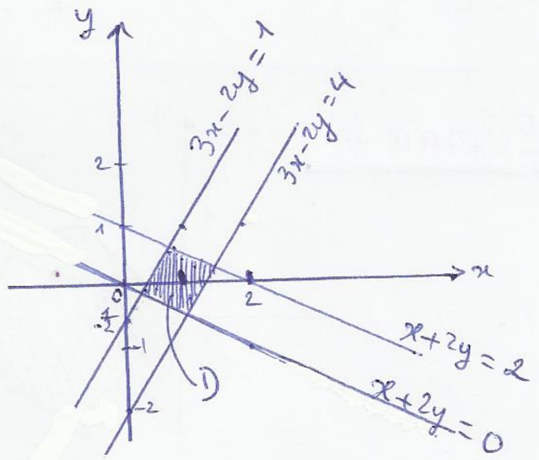
$$J = \int_0^2\left(\left[x\cos y^2\right]_0^{y/2}\right)dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{2}\cos y^2\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \underbrace{2y\cos y^2}_{u'\cos u}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin y^2\right]_0^2 = \boxed{\frac{1}{4}\sin 4}$$

c)



Posons $\begin{cases} u = x+2y \\ v = 3x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}(u+v) \\ y = -\frac{1}{8}(-3u+v) \end{cases}$

* Jacobien : $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{vmatrix}$

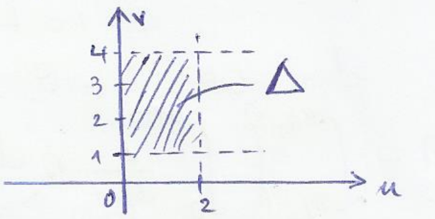
$= -\frac{1}{32} - \frac{3}{32} = -\frac{1}{8}$

* Domaine Δ de (u,v) :

$(x,y)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+2y < 2 \\ 1 < 3x-2y < 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < 2 \\ 1 < v < 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (u,v) \in \Delta$



$$K = \iint_\Delta \frac{1}{v}\left|-\frac{1}{8}\right| du\, dv$$

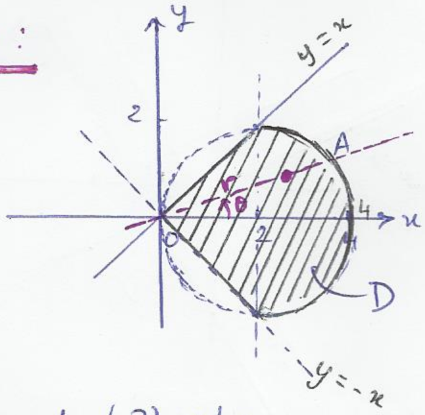
$$= \frac{1}{8}\iint_\Delta \frac{1}{v} du\, dv$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 du \times \int_1^4 \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{8}\left[u\right]_0^2 \times \left[\ln v\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 \times \ln 4 = \boxed{\frac{1}{4}\ln 4}$$

Exercice 4 :



a) La masse de (P) est :

$$M = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

Passons aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

* Sur D : $\begin{cases} \cdot\ \theta \text{ varie de } -\frac{\pi}{4} \text{ à } \frac{\pi}{4} \\ \cdot\ \text{Pour } \theta \text{ fixé, } r \text{ varie de } 0 \text{ à } OA \end{cases}$

· OA = ?

sur le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow r = 4\cos\theta$ ou $r = 0$

donc $OA = 4\cos\theta$

$$M = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_0^{4\cos\theta} \underbrace{\frac{1}{r}}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobien}}\, dr\right) d\theta$$

$$M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{4\cos\theta} dr\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos\theta\, d\theta \quad \text{fonction paire}$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\, d\theta$$

$$= 8\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{4\sqrt{2}}$$

u.m.

b) $G(x_G, y_G)$?

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\left(\int_0^{4\cos\theta} \frac{r\cos\theta}{r}\, r\, dr\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{4\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \underbrace{\cos\theta\,(8\cos^2\theta)}_{\text{paire}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,(1 - \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$\begin{cases} t = \sin\theta \\ dt = \cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - t^2)\, dt$$

$$= 2\sqrt{2}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right)\sqrt{2}$$

$$= \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{4\cos\theta}\frac{r\sin\theta}{r}\,r\,dr\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{4\cos\theta}d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\underbrace{\sin\theta.\cos^2\theta}_{\text{impaire}}\,d\theta$$

$$= \boxed{0}$$

(ce résultat était prévisible compte tenu de la symétrie du domaine)

En conclusion : $\boxed{G\left(\frac{5}{3}\,;\ 0\right)}$

c) le moment d'inertie de (P) % O

est $I = \iint_D (x^2+y^2) f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \iint_D (x^2+y^2)\times\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_0^{4\cos\theta} r\,.\,r\,dr\right)d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{4\cos\theta}d\theta$$

$$I = \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\underbrace{\cos^3\theta}_{\text{paire}}\,d\theta$$

$$= \frac{128}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{128}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{128}{3}\int_0^{\sqrt{2}/2}(1-t^2)\,dt \qquad t=\sin\theta,\ dt=\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{128}{3}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \frac{128}{3}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{128}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)\sqrt{2}$$

$$= \boxed{\frac{160}{9}\sqrt{2}} \quad \text{unités de moment}$$

NB : l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\,d\theta$ a déjà été calculée en b)

donc $I = \frac{64}{3}\times\frac{x_G}{\sqrt{2}} = \frac{64}{3}\times\frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{320}{9\sqrt{2}} = \frac{160\sqrt{2}}{9}$